2. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 13 Q, 13 R, Winter 2024/25

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 2.1 Betrachten Sie für $b > 0$ die Einschränkung der Exponentialfunktion.

$$\exp : [\,0\,,\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Weiter bezeichne $Z_n = \{x_i = i\,\frac{b}{n} \mid i = 0, \ldots, n\}$ die äquidistante Zerlegung von $[\,0\,,\,b\,]$ mit Schrittweite b/n.

1) Berechne für $b = 1$ und $n = 8$ die Obersumme $O_{Z_8}(\exp)$ auf zwei Nachkommastellen.
2) Bestimme für beliebiges $b > 0$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} O_{Z_n}(\exp)$ (und damit $\int_0^b \exp$).

Hinweis zu 1): Finden Sie eine Formel für $O_{Z_n}(\exp)$ und benutzen erst dann den Taschenrechner.

Aufgabe 2.2 Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f : [\,0\,,\,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

Hinweis: Weisen Sie das Integrierbarkeitskriterium 1.4 nach. Welche Relevanz hat dabei das erste Teilintervall $[\,0, x_1]$? Wähle x_1 geeignet und benutze, dass $f|_{[x_1,1]}$ stetig, alo integrierbar ist.

Aufgabe 2.3 Sei $f : [\,a\,,\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend.

1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $Z_n = \{x_i = a + i\,\frac{b-a}{n} \mid i = 0, \ldots, n\}$ die äquidistante Zerlegung von $[\,a\,,\,b\,]$ mit Schrittweite $(b-a)/n$. Zeigen Sie:

$$O_{Z_n}(f) - U_{Z_n}(f) \;=\; \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a))$$

2) Begründen Sie, dass f integrierbar ist.